AALBORG UNIVERSITET

STUDENTERRAPPORT

APPROKSIMATION AF KVADRATRØDDER

29. september 2020

P_0-Projekt
Gruppe B358
Matematik-Teknologi
Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

Første Studieår v/ Det Ingeniør- Og Naturvidenskabelige Fakultet
Matematik-Teknologi
Strandvejen 12-14
9000 Aalborg

Titel:

Approksimation af kvadratrødder

Projekt:

P_0-projekt

Projektperiode:

September 2020

Projektgruppe:

B358

Deltagere:

Anders Brøsted Jensen
Christian Dausel Jensen
Marcus Grøn
Marie Saugstrup Jensen
Nanna Kyllingsbæk Casper
Nikolaj Bach Nielsen
Stine Byrjalsen

Vejleder:

Orimar Sauri

Oplagstal: 1
Sidetal: 16
Afsluttet dato: 30-09-2020

Abstract:

This project examines how to approximate sqaure roots by using two different methods and then compairing them, which leads to the problem statement. How are the two approximation methods used to calculte square roots, and which method is the most appropriate? The two methods, that will be examined, are Taylor approximation and the Newton-Raphson method, which will be used to approximate the desired value that in our case is the square root of 2. The two methods are different from each other as the Taylor approximation uses a polynomial to approximate a function, whereas the Newton-Raphson method uses tangent lines to determine a zero of the function. In the theory section the Taylor approximation is described, demonstrated and lastly its error base will be explained. Afterwards the Newton-Raphson method will be demonstrated in the same way. Both will be compared in the discussion containing the focal point on their advantages and disadvantages. Based on the methods ability to approximate square roots, it can be concluded that the Newton-Raphson method is the most optimal of the two.

Forord

Dette projekt er udarbejdet af gruppe B358, som består af 1. semesterstuderende på Matematik-teknologi ved det ingeniør- og naturvidenskabelige fakultet på Aalborg Universitet. Det overordnede tema for projektet er *"Polynomiumsapproksimation af funktioner"*, hvor det udarbejdede projekt omhandler kvadratrodsapproksimation ved brug af Taylorapproksimation og Newton-Raphson metoden. Formålet med projektet har hertil været at undersøge, hvilken af de to metoder, der er mest optimal med hensyn til kvadratrodsapproksimation.

Projektet er udarbejdet i samarbejde med vejleder Orimar Sauri, som har været hjælpsom igennem projektperioden.

I projektet er der anvendt kildehenvisning efter IEEE-metoden, hvor kilder refereres i teksten med et tal. Henvisningerne fører til kildelisten sidst i projektet. Kildelisten står i rækkefølge, som de forekommer i teksten. Decimaltal er separeret af et komma gennem hele projektet.

Anders B Jensen | Christian Dausel Jensen | Marcus Grøn

Anders Brøsted Jensen | Christian Dausel Jensen | Marcus Grøn

Marie S. Jensen | Nanna K. Casper

Marie Saugstrup Jensen | Nanna Kyllingsbæk Casper

Nikola BN | Stine Byrjalsen

Nikolaj Bach Nielsen | Stine Byrjalsen

Symbolliste

Talrække	Symbol	Betydning
1	f	Funktion.
2	P_n	Polynomium af n'te grad.
3	$\in$	$x \in X$ betyder elementet x tilhører mængden X.
4	$\mathbb{R}_+$	Mængden af ikke negative reelle tal.
5	$\mathbb{R}_{>0}$	Mængden af reelle tal større end 0.
6	$\iff$	A $\iff$ B betyder, A gælder hvis og kun hvis B gælder og omvendt.
7	$f^{(n)}$	En funktion f, som er differentieret n gange.
8	$\forall$	For alle.
9	$>$ eller $<$	Større end/mindre end.
10	$\geq$ eller $\leq$	Større end/mindre end eller lig med.
11	$\implies$	A $\implies$ B betyder, A medfører B, men B medfører ikke A.
12	$n!$	Fakultet, $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Tabel 1: Liste over symboler der bliver brugt i projektet.

Indholdsfortegnelse

1 Indledning

Kvadratrødder bruges til at beregne selv de mest basale ting inden for geometri. Geometrien, f.eks. Pythagoras' læresætning, bruges i flere sammenhænge, som kendes fra hverdagen. Dog kan der opstå udfordringer, hvis der ikke er et matematisk regneredskab til rådighed, da det langt fra er alle kvadratrødder, som er rationelle tal. Derfor kan der benyttes approksimationer, hvor Taylorapproksimation og Newton-Raphson metoden er to eksempler.

Taylorapproksimation er et værktøj, der hjælper med at approksimere værdier i komplekse funktioner. Denne approksimationsmetode benytter et polynomium til at approksimere den ønskede funktion. Det færdige Taylorpolynomium vil ligge sig tæt op ad funktionen, hvor afvigelsen vil afhænge af polynomiumsgraden. Hvis polynomiumsgraden er høj nok, vil forskellen mellem graferne være tilstrækkelig lille til, at polynomiet kan erstatte funktionen.

Newton-Raphson metoden er ligeså, et værktøj til at løse komplicerede problemer ved at approksimere. Denne metode benytter sig af tangentlinjer til at approksimere nulpunkter for en funktion, men approksimerer kun et enkelt punkt, modsat Taylorapproksimationen, som approksimerer grafen.

Problemanalyse 2

I hverdagen er mennesker omgivet af forskellige teknologier, som kræver beregninger til at designe det færdige produkt. Eksempelvis til udregning af diagonaler såsom trappe- eller taglængder, hvor diagonalen ofte kan blive beskrevet som en kvadratrod. Dette kommer af Pythagoras' læresætning

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

som beskriver sammenhængen mellem længderne i en retvinklet trekant, hvor a og b beskriver kateterne, og c beskriver hypotenusen. Ud fra Pythagoras' læresætning kan længden af diagonalen skrives ved

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Det kan være svært at gennemskue den eksakte værdi for nogle kvadratrødder, da det langt fra er alle kvadratrødder, der er rationelle tal. Derfor benyttes matematiske værktøjer til at approksimere værdien af den ønskede kvadratrod. Dog findes der mange forskellige metoder til at approksimere irrationelle tal, som alle har forskellige fordele og ulemper.

2.1 Problemafgrænsning

Følgende projekt vil tage udgangspunkt i Taylorapproksimation og Newton-Raphson metoden, hvor de to metoder vil blive sammenlignet med hinanden. De to metoder vil sammenlignes i deres måde at beregne kvadratrødder på. Projektet vil kun fokusere på approksimationen af den positive løsning af kvadratrødderne.

2.2 Problemformulering

Hvordan anvendes Taylorapproksimation og Newton-Raphson metoden til at beregne kvadratrødder, samt hvilken metode er mest optimal?

Taylorapproksimation 3

I følgende afsnit vil Taylorpolynomier blive præsenteret, hvorefter Taylors formel vil blive udledt. Der vil være fokus på $\sqrt{x}$, hvor $x \in \mathbb{R}_+$. Herefter vil værdien af $\sqrt{2}$ blive beregnet ved brug af det approksimerende polynomium for $f(x) = \sqrt{x}$, som eksempel på problemstillingen.

3.1 Udledning af Taylors formel

I dette afsnit er det primært kilde [1] (s. 275-276 og s. 744), [2] og [3], der bliver brugt til at forstå udledningen af Taylors formel.

Taylorpolynomier kan bruges til at approksimere kontinuerte funktioner med approksimerende polynomier på den reelle akse. Det kan være en fordel at benytte Taylorpolynomier, da polynomier bl.a. nemt både kan integreres og differentieres i modsætningen til andre funktionstyper. Taylorpolynomier kan benyttes til at approksimere udefinerede differentialligninger og integraler, men også til at approksimere irrationelle tal, som er udgangspunktet for dette projekt.

Formålet med Taylorpolynomier er at bestemme et polynomium P, som ligger så tæt på den oprindelige funktion f som muligt. Et polynomium af graden n kan skrives som

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n, x \in \mathbb{R},$$

hvor a_0, a_1, a_2, ..., a_n er konstanter, $x \in \mathbb{R}$ og x_0 er udviklingspunktet.

Da Taylorpolynomiet blot er en approksimation af den oprindelige funktion lægges en fejl til polynomiet. Denne fejl kaldes restleddet, og betegnes R_{n,x_0}. Dette uddybes yderligere i afsnit 3.3.

$$f(x) = P_n(x) + R_{n,x_0}(x). \tag{3.1}$$

Det ønskes at bestemme konstanterne i Taylorpolynomiet, og derfor omskrives ligning (3.1)

$$R_{n,x_0}(x) = f(x) - P_n(x). \tag{3.2}$$

I udviklingspunktet forventes det, at polynomiet ikke afviger fra den oprindelige funktion. Derfor forventes det også, at $P_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \ \forall \ i = 0, 1, 2, ..., n$, hvor i beskriver antal gange funktionen differentieres. Derfor gælder det også, at $f^{(0)} = f$. Dette betyder, at fejlen i udviklingspunktet ønskes, at være mindst mulig. Derfor sættes restleddet lig 0 i udviklingspunktet

$$0 = f(x_0) - P_n(x_0).$$

Da $x_0 - x_0 = 0$ går alle ledende, hvor $(x_0 - x_0)$ indgår som produkt, ud. Tilbage står der

$$0 = f(x_0) - a_0 \Longleftrightarrow a_0 = f(x_0).$$

Det samme gælder, hvis ligning (3.2) differentieres, da forventningen om, at polynomiet ikke afviger fra funktionen i udviklingspunktet gælder for alle afledede af f og P_n. Derfor differentieres udtrykket i ligning (3.2) og fejlen sættes lig nul i udviklingspunktet

$$0 = f^{(1)}(x_0) - a_1(x_0 - x_0) - 2a_2(x_0 - x_0) - ... - na_n(x_0 - x_0)^{(n-1)}. \tag{3.3}$$

Da $x_0 - x_0 = 0$ går alle ledende, hvor $(x_0 - x_0)$ indgår som produkt, ud. Tilbage står der

$$0 = f^{(1)}(x_0) - a_1 \iff a_1 = f^{(1)}(x_0).$$

På samme måde ønskes fejlen at være nul for $f^{(2)}(x_0)$

$${R^{(2)}}_{n,x_0}(x_0) = 0.$$

Derfor differentieres udtrykket i ligning (3.3) og sættes lig 0 i udviklingspunktet

$$0 = f^{(2)}(x_0) - 2a_2 - ... - n \cdot (n-1) \cdot a_n(x_0 - x_0)^{(n-2)}.$$

Da $x_0 - x_0 = 0$ går alle ledende, hvor $(x_0 - x_0)$ indgår som produkt, ud. Tilbage står der

$$0 = f^{(2)}(x_0) - 2a_2 \iff 2a_2 = f^{(2)}(x_0) \iff a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}.$$

Således kan det fortsættes. På samme måde som $i = 0, 1, 2$, ønskes fejlen at være nul $\forall\ i$. Generelt gælder, at når udtrykket i ligning (3.2) differentieres n antal gange, så fås, at

$${R^{(n)}}_{n,x_0}(x_0) = 0,$$

$$0 = f^{(n)}(x_0) - n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n. \tag{3.4}$$

Leddet $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ er det samme som $n!$ og derfor kan udtrykket fra ligning (3.4) skrives som

$$0 = f^{(n)}(x_0) - n! \cdot a_n.$$

$$\iff a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{3.5}$$

Dermed kan alle konstanter til et n'te grads polynomium bestemmes ved (3.5). Ud fra udledningen fås formlen for et n'te Taylorpolynomium

$$P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, x \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

3.2 Eksempel med approksimation af $\sqrt{2}$

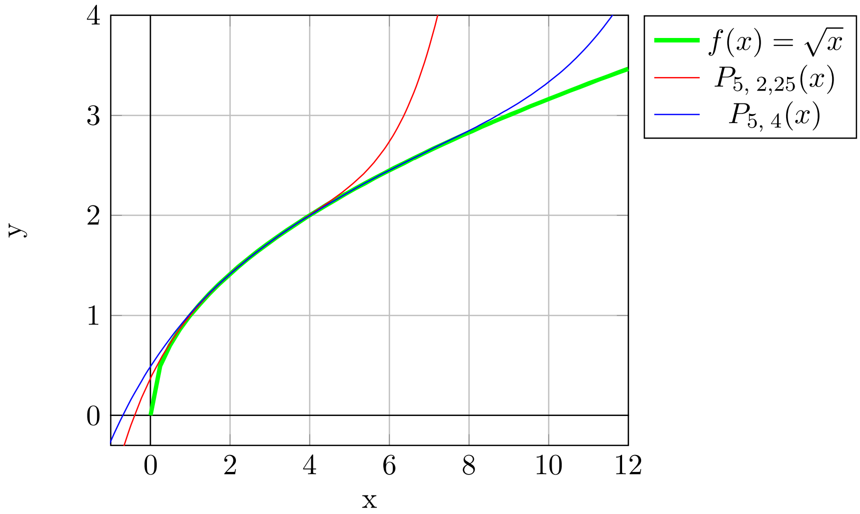
I følgende eksempel vil værdien af $\sqrt{2}$ blive approksimeret vha. Taylorpolynomiet for $f(x) = \sqrt{x}$ for $x \in \mathbb{R}_+$. For at approksimere $\sqrt{2}$ benyttes ligning (3.6) til at lave en Taylorapproksimation i 5. grad. De afledede af f beregnes, hvor f er uendeligt differentiabel i hele intervallet for x.

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}, & f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{4 \cdot x^{\frac{3}{2}}}, & & \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8 \cdot x^{\frac{5}{2}}}, & f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16 \cdot x^{\frac{7}{2}}}, & & x \in \mathbb{R}_{>0}. \\ f^{(5)}(x) &= \frac{105}{32 \cdot x^{\frac{9}{2}}}, & & & & \end{aligned}$$

De afledede funktioner sættes ind i ligning (3.6) for at bestemme det approksimerende polynomium

$$P_5(x) = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}(x - x_0) - \frac{1}{2! \cdot 4(x_0)^{\frac{3}{2}}}(x - x_0)^2 + \frac{3}{3! \cdot 8(x_0)^{\frac{5}{2}}}(x - x_0)^3 - \frac{15}{4! \cdot 16(x_0)^{\frac{7}{2}}}(x - x_0)^4 + \frac{105}{5! \cdot 32(x_0)^{\frac{9}{2}}}(x - x_0)^5, \; x \in \mathbb{R}_{>0}. \tag{3.7}$$

Værdien for udviklingspunktet bestemmes, så den ligger tæt på værdien for x. Det ses på figur 3.1, at grafen for det approksimerende polynomium afviger mere ved værdier længere væk fra udviklingspunktet. Grunden til at x_0 ikke har værdien 2,01 er, at dette tal vil være mindst lige så svært at beregne vha. hovedregning. Derfor sættes udviklingspunktet til 2,25, da $\sqrt{2,25} = 1,5$, hvilket kan udregnes vha. simpel hovedregning. Udviklingspunktet 2,25 sættes ind på x_0's plads



Figur 3.1: Den grønne linje følger grafen for $f(x) = \sqrt{x}$. Den røde og blå graf, er begge Taylorapproksimationer af $f(x)$ af 5. grad, der begge har ligning (3.7) som funktionsforskrift. Den røde graf har udviklingspunkt i 2,25 og den blå graf har udviklingspunkt i 4.

$$P_5(x) = \sqrt{2,25} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2,25}} \cdot (x - 2,25) - \frac{1}{2! \cdot 4(2,25)^{\frac{3}{2}}}(x - 2,25)^2 + \frac{3}{3! \cdot 8(2,25)^{\frac{5}{2}}} \cdot (x - 2,25)^3 - \frac{15}{4! \cdot 16(2,25)^{\frac{7}{2}}}(x - 2,25)^4 + \frac{105}{5! \cdot 32(2,25)^{\frac{9}{2}}}(x - 2,25)^5.$$

Værdien for x sættes ind og approksimationen kan beregnes. Værdien for $\sqrt{2}$ approksimeres ved at bestemme $P_5(2)$

$$\begin{aligned} P_5(2) =& \sqrt{2,25} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2,25}} \cdot (2 - 2,25) - \frac{1}{2! \cdot 4(2,25)^{\frac{3}{2}}}(2 - 2,25)^2 + \frac{3}{3! \cdot 8(2,25)^{\frac{5}{2}}} \cdot (2 - 2,25)^3 \\ &- \frac{15}{4! \cdot 16(2,25)^{\frac{7}{2}}}(2 - 2,25)^4 + \frac{105}{5! \cdot 32(2,25)^{\frac{9}{2}}}(2 - 2,25)^5 \\ \approx& 1,414213625. \end{aligned}$$

Polynomiet, P_5, giver tallet 1,414213625, hvilket er en approksimation af $\sqrt{2}$.

3.3 Restled

I dette afsnit bliver kilde [1] (s. 278-279) brugt til forståelsen af restleddet.

Da funktionen f og Taylorapproksimationen ikke er ens, vil der være en forskel mellem de to grafer, som bliver beskrevet i ligning (3.1). Differensen mellem de to grafer, kan bruges til at vurdere, hvor stor en fejl, der begås ved benyttelse af Taylorapproksimationen. For at fejlen af et Taylorpolynomium af n'te grad kan beregnes, skal $f^{(n+1)}$ være defineret. Formlen for at beregne fejlen kan skrives ved

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}, x \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

hvor s har en værdi mellem x_0 og x. Da s kun er defineret ud fra, at den har en værdi mellem x_0 og x, kan den præcise fejl ikke beregnes. I stedet kan den største og mindste fejl beregnes, hvor fejlen vil være størst for den værdi af s, som giver den største funktionsværdi af $f^{(n+1)}(s)$.

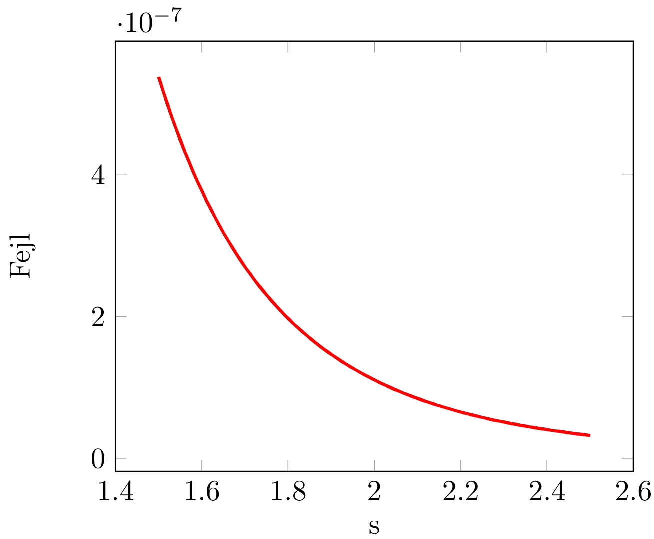
Da dette eksempel har taget udgangspunkt i et 5. grads polynomium, grundet $n = 5$, kan det ses i (3.8), at funktionens 6. afledede skal bruges i restledsligningen. Den 6. afledede af funktionen ser således ud

$$f^{(6)}(x) = -\frac{945}{64 \cdot x^{\frac{11}{2}}}, x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Den 6. afledede sættes ind i ligningen for restleddet, samt x- og x_0-værdien, som er hhv. 2 og 2,25

$$R_{5,\,2,25}(2) = \frac{-945}{64 \cdot s^{\frac{11}{2}} \cdot 6!}(2-2,25)^6. \tag{3.9}$$

For at finde den maksimale fejl laves en graf for ligning (3.9), som kan ses på figur 3.2. På samme



Figur 3.2: Grafen viser variationen i fejlen for approksimationen af 5. grads Taylor polynomiumet for en given værdi s.

figur ses det, at P_5 afviger mest ved $s = 2$. Intervallet beregnes for approksimationen af $\sqrt{2}$, ved at sætte værdierne for x og x_0 ind på s's plads i ligning (3.9). Værdien for $\sqrt{2}$ indgår i ligning (3.9), når $s = 2$, som ikke kan beregnes uden en approksimation. Derfor beregnes afvigelsen i stedet for $s = 1,96$, hvor $\sqrt{1,96} = 1,4$. Da $\sqrt{1,96} < \sqrt{2}$ vil fejlen, når $s = 1,96$ blive større end, når $s = 2$. Fejlene beregnes:

$$R_{5,\ 2,25}(2) = \frac{-945}{64 \cdot 1.96^{\frac{11}{2}} \cdot 6!}(2-2,25)^6 = -2,5808 \cdot 10^{-6},$$

$$R_{5,\ 2,25}(2) = \frac{-945}{64 \cdot 2.25^{\frac{11}{2}} \cdot 6!}(2-2,25)^6 = -5,7884 \cdot 10^{-8}.$$

Intervallet for approksimationen beregnes ved at bruge værdien for P_5 fra ovenstående eksempel:

$$x_{nedre} = 1,414213625 - 2,5808 \cdot 10^{-6} = 1,414211044,$$

$$x_{øvre} = 1,414213625 - 5,7884 \cdot 10^{-8} = 1,414213567.$$

Dette betyder, at $1,414211044 \leq \sqrt{2} \leq 1,414213567$ ifølge ovenstående approksimation.

3.4 Resultater

I denne sektion er der beregnet værdier for polynomiet op til 7. grad. Grunden til, at det netop er 7. grad, er fordi Taylorpolynomiet bliver præcist ud på det 9. decimal. I diskussionen vil approksimationen blive sammenlignet med Newton-Raphson metodens, hvor de vil blive sammenlignet ud fra en præcision på 9 decimaler. Følgende tabel viser de approksimerede værdier for $\sqrt{2}$ for Taylorpolynomier fra 1. til 7. grad. Derudover vil den tilhørende fejl for $s = 1,96$ blive beregnet, da det er den maximale fejl for approksimationen.

P_n	Approksimation	Den maksimale fejl
P_1	1,416666667	$-2,8471 \cdot 10^{-3}$
P_2	1,414351852	$-1,8157 \cdot 10^{-4}$
P_3	1,414223251	$-1,4475 \cdot 10^{-5}$
P_4	1,414214320	$-1,2924 \cdot 10^{-6}$
P_5	1,414213625	$-1,2364 \cdot 10^{-7}$
P_6	1,414213567	$-1,2391 \cdot 10^{-8}$
P_7	1,414213562	$-1,2841 \cdot 10^{-9}$

Tabel 3.1: Tabel over de approksimerede værdier af P_1 til P_7, med tilhørende restled af den maksimale fejl.

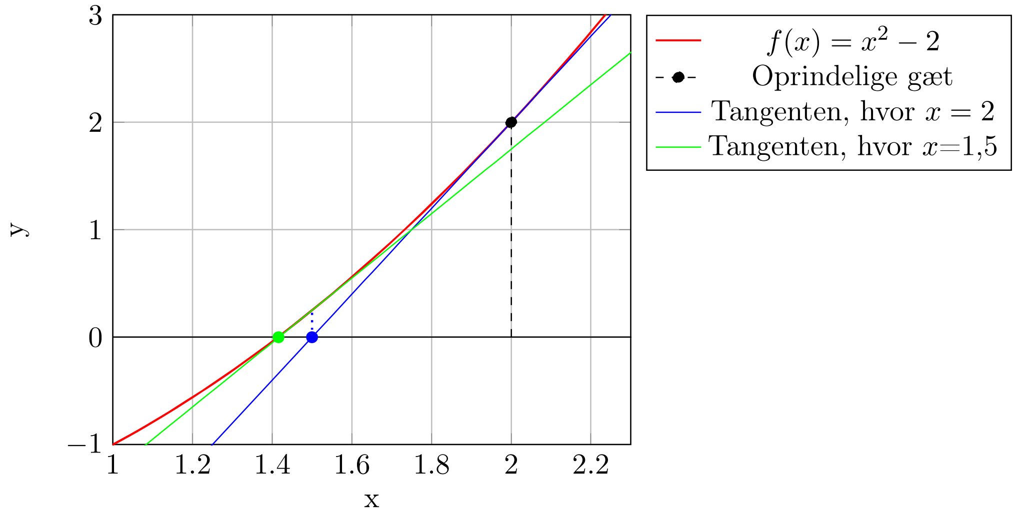
Newton-Raphson metoden 4

I følgende afsnit gennemgås ideen bag Newton-Raphson metoden samt de definitioner, der er nødvendige til at benytte Newton-Raphson metoden. Desuden gennemgås metodens fejlkilder. Herefter benyttes metoden til at approksimere et eksempel med $\sqrt{2}$, da der er fokus på kvadratrødder i projektet.

4.1 Udledning af Newton-Raphson metoden

I dette afsnit er kilde [1] (s.225-226) benyttet til at forstå udledningen af Newton-Raphson metoden.

Newton-Raphson metoden er en iterativ proces, som bruges til at approksimere $f(x_*) = 0$. Metoden tager udgangspunkt i et gæt, x_n, som er et punkt, der estimeres til at ligge forholdsvis tæt på x_*. Ud fra det oprindelige gæt benyttes Newton-Raphson metoden til at finde en ny værdi, som er tættere på x_* end det forrige gæt. Herefter kan Newton-Raphson metoden gentages, hvor den udregnede værdi hver gang vil nærme sig værdien for x_*. Metoden handler med andre ord om at approksimere en værdi af nulpunktet x_*. Metoden kan illustreres grafisk,



Figur 4.1: Newton-Raphsons metode. Den røde graf er grafen for funktionen $f(x) = x^2 - 2$. Det blå og grønne punkt er tangenternes skæring med x-aksen.

se figur 4.1, hvor en tangentlinje til grafen for f konstrueres i punktet x_n. Punktet x_n er startgættet og er illusteret ved det sorte punkt, hvor den tilhørende tangentlinje er blå. Det punkt, hvor tangentlinjen skærer x-aksen, vil befinde sig tættere på x_* end startgættet. Dette kan ses på figur 4.1, da det blå punkt ligger tættere på f's nulpunkt end det sorte punkt. Ud fra tangentlinjen for x_n's nulpunkt laves en ny tangentlinje, som er den grønne tangent.

Der, hvor den nye tangentlinje skærer x-aksen vil et nyt punkt ligge, som er endnu tættere på nulpunktet for f og kan aflæses som det grønne punkt. Hver gang processen gentages, vil afvigelsen blive mindre, da den approksimerede værdi konvergerer imod et nulpunkt $f(x_*) = 0$. Dette skyldes, at tangentlinjen vil blive en bedre approksimation af funktionens graf omkring x_* for hver iteration. Newton-Raphson metoden approksimerer derfor funktionen med en lineær linje, hvor Taylorapproksimation benytter polynomier.

Processen vil ikke altid konvergere. Dette kan ske på betingelse af, at $lim_{n\to\infty} x_n = x_*$ eksisterer samt, at $f(x)/f^{(1)}(x)$ er kontinuert i nærheden af x_*, så vil x_* være et nulpunkt for $f(x)$.

Tangentligningen til et punkt kan ses som en Taylorapproksimation af første grad. Denne approksimation vil have et nulpunkt, som er en tilnærmelse af nulpunktet for den rigtige funktion. Nulpunktet for approksimationen vil i de fleste tilfælde være tættere på x_* end skæringspunktet med funktionen, da tangenten følger funktionens udvikling. Ud fra teori om Taylorpolynomier vides det, at fejlen af approksimationen vil blive større, jo længere væk der approksimeres fra udviklingspunktet. Dette ses ud fra sætning (3.8), hvor fejlen vil blive større, når differensen mellem x og x_0 bliver større. Da der nu er et punkt der er tættere på x_*, kan der nu laves en ny tangentlinje, som bedre approksimerer funktionen ved nulpunktet.

For at udlede Newton-Raphson metoden benyttes tangentligningen

$$y(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0) \cdot (x - x_0),$$

hvor x_0 er tangentens skæringspunkt med funktionen, f, og $x \in \mathbb{R}$.

Tangenten, y, sættes lig med 0 for at finde et nulpunkt, hvor tangentligningen skærer x-aksen

$$0 = f(x_0) + f^{(1)}(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Dette udtryk kan omskrives ved at isolere x

$$-f^{(1)}(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) \Longrightarrow (x - x_0) = \frac{-f(x_0)}{f^{(1)}(x_0)}$$

$$\Longrightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{(1)}(x_0)}. \tag{4.1}$$

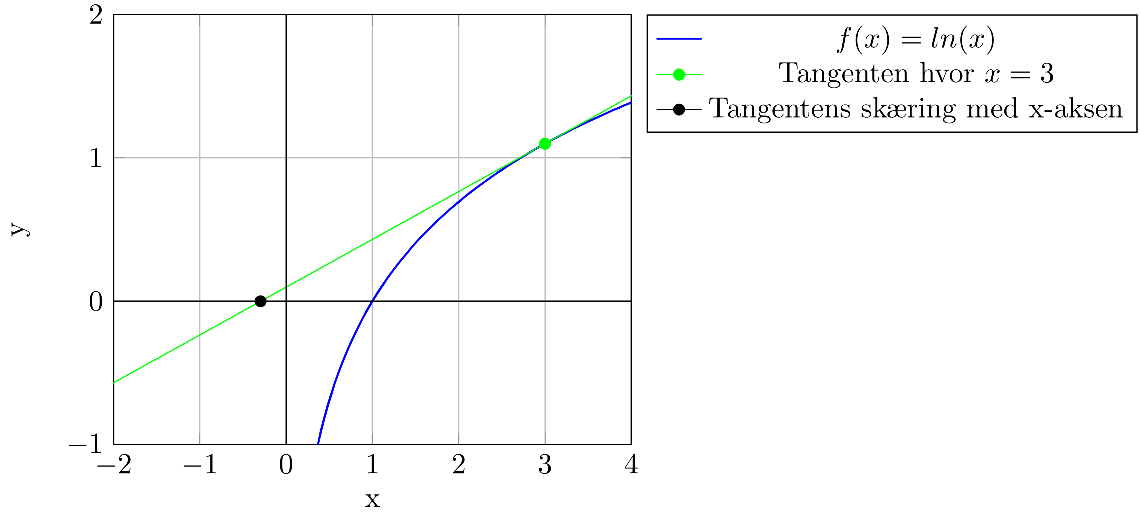
Fra ligning (4.1) kan det næste nulpunkt i iterationsrækken bestemmes ud fra startgættet. Det kan omskrives til en general sætning, som er Newton-Raphson metoden

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{(1)}(x_n)}, \tag{4.2}$$

hvor x_{n+1} vil nærme sig x_* for hver gentagelse.

4.2 Fejlkilder

Alle tilfælde, hvor metoden ikke ender i et nulpunkt, kan siges at være en fejl. En sådan fejl kan være, at rækken slutter, uden mulighed for at finde et nyt nulpunkt. Dette kan ske ved at lave et gæt uden for intervallet af funktionen, eller et gæt, som fører til et nulpunkt uden for intervallet af funktionen. F.eks $ln(x)$ for $x < 0$, da funktionen ikke er defineret for reelle tal under 0. Dette kan ses på figur 4.2. Metoden fejler i tilfælde ved en vandret tangent, da hældningskoefficenten



Figur 4.2: På grafen ses funktionen for $f(x)$ samt dens tangent, der skærer f i $x = 3$. Tangenten har et nulpunkt på den negative del af x-aksen, som er udenfor f's definitionsmængde.

i det givet punkt er lig 0. Dette vil resulterer i, at der ikke vil være en skæring med x-aksen, og rækken vil hermed slutte. Et andet tilfælde er, hvis funktionen har en lodret tangent. Hvis gættet kommer i nærheden af en lodret tangent, vil der kun være en lille ændring for hver iteration. Dermed kan der ved en fejl laves en forkert konklusion for værdien af x_*, da dette ikke ville være et nulpunkt. Derudover kan det også forekomme, at processen svinger mellem flere værdier uden at nærme sig x_*, hvor metoden derfor ikke vil ende i en løsning.

Arbejdes der med en funktion, som har flere nulpunkter, hvor der er valgt et udgangspunkt på den forkerte side af et ekstremum, kan dette resultere i, at det forkerte nulpunkt bestemmes. Derfor skal gættet være på samme side af et ekstremum. Det kan også ske, at den funktion, som vælges til at regne på, ikke har nogen skæringspunkter med x-aksen. Dette er påkrævet for at kunne bruge metoden, da der ellers ikke vil være en værdi, som opfylder, at $f(x) = 0$.

4.3 Eksempel med approksimation af $\sqrt{2}$

I dette afsnit er kilde [4] benyttet.

Givet funktionen $f(x) = x^2 - z$, hvor z er en konstant og x er en ubekendt variabel, vil nulpunktet for funktionen opfylde, at $\sqrt{z} = x$. Ved at benytte Newton-Raphson metoden på denne funktion, kan kvadratroden af en vilkårlig værdi z bestemmes. I dette eksempel tages der udgangspunkt i at bestemme $\sqrt{2}$ og der vil derfor arbejdes med funktionen $f(x) = x^2 - 2$, hvor Newton-Raphson metoden benyttes til at approksimere $f(x_*) = 0$.

For at have et kvalificeret gæt til en x-værdi, hvor $f(x_*) = 0$, udregnes værdier, hvor $f(x)$ er hhv. positiv og negativ:

$$f(1) = 1^2 - 2 = -1,$$

$$f(2) = 2^2 - 2 = 2.$$

Da funktionen er kontinuert, vil grafen på et tidspunkt krydse 0, hvilket betyder, at der findes en værdi af x, som opfylder $f(x_*) = 0$. Da værdierne $f(1) = -1$ og $f(2) = 2$ har forskellige fortegn, må værdien for x, når $f(x) = 0$ ligge mellem 1 og 2. Værdien for x_1 vælges derfor til $x_1 = 1,5$.

Ligning (4.2) benyttes til at beregne x_{n+1}-værdierne, hvor $f^{(1)}(x) = 2x$. Dog for funktionen $f(x) = x^2 - 2$ kan den generelle formel fra ligning (4.2), omskrives til en enklere ligning

$$\begin{aligned}
x_{n+1} =& x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
\Longleftrightarrow x_{n+1} =& x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\
\Longleftrightarrow x_{n+1} =& x_n - \frac{2(\frac{1}{2}x_n^2 - 1)}{2x_n} \\
\Longleftrightarrow x_{n+1} =& x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \\
\Longleftrightarrow x_{n+1} =& \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Den enklere ligning (4.3) benyttes til at beregne værdien for x_2 ved brug af den valgte værdi for x_1

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 + \frac{1}{1,5} = 1,416666667.$$

Dette fortsættes indtil værdien for x_{n+1} er minimalt eller ikke ændret fra den forrige x_{n+1}-værdi

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1}{2} \cdot 1,416666667 + \frac{1}{1,416666667} = 1,414215686, \\
x_4 &= \frac{1}{2} \cdot 1,414215686 + \frac{1}{1,414215686} = 1,414213562, \\
x_5 &= \frac{1}{2} \cdot 1,414213562 + \frac{1}{1,414213562} = 1,414213562.
\end{aligned}$$

Det ses, at $x_4 = x_5$ samt, at der er en minimal ændring fra x_3 til x_4. Da der fokuseres på at finde løsningen $f(x) = 0$ beregnes $f(x_5)$:

$$f(1,414213562) = 1,414213562^2 - 2 = -0,000000001 \approx 0.$$

Da $f(1,414213562)$ afviger minimalt fra nul fås en approksimeret løsning til $f(x) = x^2 - 2$:

$$x = x_5 = 1,414213562.$$

Det ses, at:

$$x = 1,414213562 \approx \sqrt{2}.$$

Det ses også i eksemplet, at jo flere gange dette gentages, vil det resultere i en mere præcis approksimation.

Diskussion 5

Newton-Raphson metoden og Taylorapproksimation har hver deres fordele og ulemper. I dette kapitel vil det blive diskuteret, hvilke situationer hver metode vil være mest optimal til approksimation. Der vil blandt andet blive lagt vægt på, hvilken metode, der har færrest iterationer og størrelsen af afvigelsen. Diskussionen vil tage udgangspunkt i approksimation af kvadratrødder, hvor der vil blive refereret til eksemplerne med approksimationen af $\sqrt{2}$. De approksimerede værdier fra eksemplerne vil blive sammenlignet med værdien for $\sqrt{2}$ med kun 9 decimaler $1,414213562$ [5].

Taylorapproksimation går ud fra først at danne en ret linje i udviklingspunktet, som derefter tilpasser sig den reelle funktion ved brug af polynomier af større n'te grad. Resultatet af Taylorapproksimationen vil give et polynomium, som vil ligne den oprindelige funktion, hvor $f(x)$-værdien for funktionen kan approksimeres ved hjælp af polynomiet. Uanset hvad, vil der opstå et restled, da polynomiet og den oprindelige funktion aldrig vil være helt ens, medmindre polynomiet er af uendelig grad. De to funktioner vil ligne hinanden mest omkring udviklingspunktet. Det ønskes at approksimere $\sqrt{2}$ med 6 decimalers præcision, hvor det ses ud fra tabel 3.1, at dette er opfyldt, når $n = 5$.

Newton-Raphson metoden tager udgangspunkt i kvalificerede gæt, hvor metoden efter gentagende beregninger nærmer sig værdien for x_*. Dog har metoden flere fejlkilder, som nævnt i afsnit 4.2, der kan resultere i en forkert approksimeret x_*-værdi. Ved beregning af $\sqrt{2}$ har det krævet 4 iterationer, hvor startgættet var 1,5, for at komme frem til et resultat med 9 decimalers nøjagtighed.

I projektet er der sat en begrænsning på, hvor mange iterationer, der er lavet ved de to metoder. Iterationen af metoderne er forskellige, men i begge tilfælde betyder en iteration en bedre approksimation end den forrige. En iteration ved Newton-Raphson metoden er en beregning af en ny x_n-værdi ved brug af ligning (4.2). En iteration ved Taylorapproksimationen foretages ved at øge polynomiets grad med 1. De to metoder sammenlignes ved antallet af iterationer, som det har krævet for, at approksimationen af $\sqrt{2}$ er præcis indenfor 9 decimaler. Ved Newton-Raphson metoden krævede det 4 iterationer, hvor Taylorapproksimationen først var præcis ved 8. iteration, som aflæses fra tabel 3.1. Ud fra denne sammenligning er Newton-Raphson metoden den mest optimale, da den kræver færrest iterationer for at komme frem til et mere præcist svar.

Fordelen ved at lave en iteration for Newton-Raphson er, at det umiddelbart er en nemmere beregning, da ligningen ikke har lige så mange led sammenlignet med Taylorpolynomiet. Hvis $\sqrt{2}$ skulle approksimeres ud fra hovedregning, ville det derfor være hurtigst at vælge Newton-Raphson metoden. Men hvis den samme beregning senere skulle laves af $\sqrt{3}$, ville det være hurtigere at lave en ny beregning med et Taylorpolynomium, da konstanterne a_0, a_1, ..., a_n allerede ville være beregnet. Dog ville dette kun gælde, hvis udviklingspunktet var uændret, da konstanterne er afhængige af udviklingspunktet.

Det er også værd at nævne, at der i andre anvendelser af metoderne kan være tilfælde, hvor det kan være en fordel at bruge Taylorpolynomiets præcision i et interval, i modsætning til Newton-Raphson metodens enkelte punkt.

Konklusion 6

I projektet er der arbejdet med to approksimationsmetoder, Taylorapproksimation og Newton-Raphson metoden, som benyttes med henblik på at approksimere kvadratrødder. Begge metoder er blevet brugt til at bestemme en approksimeret værdi af $\sqrt{2}$. Ved at bruge Taylorapproksimationen for $n = 5$ fås følgende approksimerende polynomium for $f(x) = \sqrt{x}$

$$P_5(x) = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}(x - x_0) - \frac{1}{2! \cdot 4(x_0)^{\frac{3}{2}}}(x - x_0)^2 + \frac{3}{3! \cdot 8(x_0)^{\frac{5}{2}}}(x - x_0)^3$$
$$- \frac{15}{4! \cdot 16(x_0)^{\frac{7}{2}}}(x - x_0)^4 + \frac{105}{5! \cdot 32(x_0)^{\frac{9}{2}}}(x - x_0)^5, \ x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

For at approksimere kvadratrødder ved brug af Newton-Raphson metoden, benyttes funktionen $f(x) = x^2 - z$, hvor et nulpunkt for funktionen opfylder $\sqrt{z} = x$. Til approksimering af $\sqrt{2}$ er ligning (4.3) blevet brugt til beregning af x_{n+1}. Fra eksemplet i sektion 4.3 ses det at det kræver 4 iterationer med Newton-Raphson metoden for at approksimationen bliver nøjagtig på 9 decimaler. Det ses i tabel 3.1, at Taylorapproksimation skal anvendes til 8. grad for at få samme nøjagtighed på 9 decimaler. Newton-Raphson metoden benytter derfor færre iterationer end Taylorapproksimationen til at komme frem til samme nøjagtighed. Heraf kan det konkluderes, at Newton-Raphson metoden er den mest optimale til at finde en værdi af kvadratrødder med flest mulige korrekte decimaler med færrest iterationer.

Litteratur

[1] R. A. Adams and C. Essex, *Calculus: a complete course*, vol. 9. Addison-Wesley Boston, 2018.

[2] DTUcourse01005, *Approximerende Polynomier 1.* https://www.youtube.com/watch?time_continue=1&v=VnyVA9SizeM&feature=emb_logo, 2011.

[3] Peter Alsholm, *Approksimation ved Taylorpolynomier.* http://alsholm.dk/people/P.K.Alsholm/01905/Noter/taylor.pdf, 2006.

[4] The Organic Chemestry Tutor, *Newton´s method.* https://www.youtube.com/watch?v=-5e2cULI3H8, 2018.

[5] R. Nemiroff and J. Bonnell, *The Square Root of Two to 1 Million Digits.* https://apod.nasa.gov/htmltest/gifcity/sqrt2.1mil, 1994.